A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

71

Dicembre
2015

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro di risorse
didattiche e digitali

1. La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica

Maura Iori[1]

This paper addresses the issue of the mathematics teacher's awareness of the semiotic and cognitive aspects of learning, especially by highlighting the degree of awareness that the teacher shows about: (1) the level at which what the institution proposes as a mathematical object is placed and the level at which what the institution proposes as a semiotic representation of that mathematical object is placed; (2) the different aspects of a semiotic representation that the student able to handle the representation and the student who handles the representation with difficulty may focus on; (3) the semiotic conflicts generated by the contents of semiotic representations that are similar to each other in some respects. The issue is addressed within a broad theoretical framework based mainly on the semio-cognitive approach introduced by Raymond Duval, the semiotic-interpretive approach of the Peircean tradition, and the anthropological theory of the didactics by Yves Chevallard.

1. Premessa

Il problema della consapevolezza dell'insegnante della dimensione *semio-cognitiva* (cioè semiotica e cognitiva allo stesso tempo) dell'apprendimento della matematica costituisce un aspetto poco esplorato dalla ricerca, almeno in maniera diretta, e difficile da indagare in tutta la sua complessità, soprattutto perché, nella maggior parte dei casi, manca una formazione specifica al riguardo. Si tratta tuttavia di un aspetto di grande interesse e di estrema importanza, a livello sia teorico sia pratico, per intervenire in modo professionale sulle difficoltà di natura semiotica e cognitiva che lo studente e l'insegnante devono in qualche modo affrontare, gestire e controllare insieme. La nostra ricerca, condotta tra il 2012 e il 2013 nell'ambito di una tesi dottorale, si è focalizzata proprio su tale aspetto, ben consapevoli della sua inscindibilità da altri aspetti, come quelli di natura pedagogica, sociale, affettiva, e dalle concezioni epistemologiche manifestate dall'insegnante (anche in forma non del tutto consapevole) sulla matematica e sulla sua didattica.

2. Quadro teorico

Le ricerche sulla dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica sono relativamente recenti, risalgono agli anni '90, in particolare agli studi pioneristici di Duval (1988a, 1988b, 1988c, 1993). Si sono focalizzate per lo più sullo studente, assumendo spesso implicitamente che le difficoltà di natura semiotica e cognitiva che emergono dalle produzioni matematiche dello studente siano anche quelle evidenziate dall'insegnante nell'analisi di tali produzioni, oppure nell'adattamento di determinati contenuti matematici al contesto dell'aula. Tali ricerche hanno mostrato sempre più chiaramente che le difficoltà che lo studente incontra nelle attività matematiche

1. PhD, membro del NRD, Università di Bologna.

Iori, M. (2015). La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica. *Bollettino del docenti di matematica*, 71, 59-91. ISBN 978-88-99453-00-8

derivano in gran parte (se non direttamente da fattori psicologici, affettivi, emozionali, sociali etc.) dal tipo di funzionamento cognitivo che l'attività matematica richiede in maniera specifica, ovvero dalla inscindibilità di tale funzionamento da una gestione esclusivamente semiotica degli oggetti matematici (D'Amore, 2001, 2006a, 2006b; Duval, 1993, 2011). Da qui la necessità da parte dell'insegnante di una presa di coscienza della peculiarità e complessità della gestione delle rappresentazioni semiotiche e dei segni utilizzati nelle attività matematiche, della inscindibilità di tale gestione dalla costruzione cognitiva di oggetti o concetti matematici e dunque dai processi di apprendimento in matematica. Ma fino a che punto l'insegnante è consapevole di tale dimensione?

L'obiettivo generale della nostra ricerca è stato proprio quello di evidenziare il grado di consapevolezza che l'insegnante manifesta:

1. del livello a cui si colloca ciò che l'istituzione (scuola, università, società etc.) propone come oggetto matematico (non in sé ma come) tema di apprendimento e del livello a cui si colloca ciò che l'istituzione propone come rappresentazione semiotica di quell'oggetto matematico nell'insegnamento-apprendimento della matematica;
2. dei diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente in grado di gestirla punta l'attenzione o basa le proprie produzioni matematiche;
3. dei diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà punta l'attenzione o basa le proprie produzioni matematiche;
4. dei conflitti semiotici generati dal contenuto (*representamen* in senso peirceano, veicolo o parte «materiale») di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto.[2]

Ma come concepire un oggetto matematico? Che cosa intendere per rappresentazione semiotica di un oggetto matematico?

2.1. Oggetti, segni, rappresentazioni e registri di rappresentazione

Iniziamo dalla parola «oggetto». Essa deriva dal sostantivo neutro *obiectum* (del latino medievale), dal verbo *obicere* «gettare o collocare davanti», «essere opposto», «contrapporre». Ma il concetto di «oggetto» emerge quando nel sostantivo neutro *obiectum* confluiscono due significati: quello di «ostacolo per la visione» adottato da Agostino d'Ippona (354–430), e quello associato da Aristotele al termine greco αντικείμενα (*antikeímena*, che etimologicamente significa «ciò che è posto di fronte») per designare gli opposti, i contrari, o più in generale una relazione reciproca tra due entità o fenomeni, come quella tra il conoscibile e la conoscenza, tra la capacità di conoscere e ciò che tale capacità permette di far conoscere. La parola «oggetto», da un punto di vista etimologico, designa dunque non solo ciò che sta di fronte, l'ostacolo interposto, ma anche ciò che è riconosciuto come risultato dell'atto del conoscere, ovvero della

2. Per *conflitto semiotico* (Godino, Batanero, & Font, 2007) intendiamo l'emergere di una discordanza tra le interpretazioni del contenuto di una rappresentazione semiotica da parte di due soggetti (persone o istituzioni).

relazione tra il soggetto e ciò su cui il soggetto focalizza la sua attenzione (per approfondire si veda: Cassin, Apter, Lezra, & Wood, 2014).

Questo spiega, almeno in parte, come mai oggi nell'uso della parola «oggetto» si tende spesso a confondere, anche nel contesto didattico, realtà differenti, in particolare le quattro realtà seguenti (Duval, 2009):

- l'oggetto come *cosa* (in greco: πρᾶγμα [*pragma*], in latino: *res*),[3] cioè l'oggetto concreto, fisico, accessibile attraverso i sensi (nel senso espresso nella *Metafisica* di Aristotele), direttamente o strumentalmente;
- l'oggetto *intenzional*e, vale a dire ciò su cui si focalizza l'attenzione, ciò a cui si punta, ciò che si percepisce, ciò che è immediatamente e direttamente notato (forma, colore, suono etc.) ogni volta che si dirige l'attenzione verso qualcosa, cioè l'oggetto di un atto (intenzionale) di significazione;
- l'oggetto *fenomenologico*, vale a dire l'oggetto così come appare nella coscienza e che permette al soggetto di riconoscerlo nelle sue occorrenze; oggetto complesso per il suo carattere predefinito da una parte e per la sua apertura e incompletezza dall'altra parte (Lanfredini, 2006);
- l'oggetto *di conoscenza*, vale a dire l'invariante, indipendentemente dal suo eventuale modo di «esistere» (qualunque cosa ciò voglia dire), di molteplici rappresentazioni possibili, in particolare:
  - l'oggetto *sperimentale*, cioè l'invariante causale di una molteplicità di fenomeni osservati (rappresentazioni non-semiotiche);
  - l'oggetto *matematico*, cioè l'invariante operatorio o logico-discorsivo di una molteplicità di rappresentazioni semiotiche.

Nell'insegnamento-apprendimento della matematica si fa riferimento sia a oggetti di conoscenza (oggetti matematici) sia a oggetti intesi come *cose*, sia a oggetti fenomenologici e intenzionali; spesso tra loro confusi. La posizione (implicitamente o esplicitamente) assunta da insegnanti e studenti sugli oggetti matematici ha dunque un ruolo non trascurabile, anzi cruciale, nell'insegnamento-apprendimento.

Nell'approccio semio-cognitivo di Duval, un oggetto matematico è l'invariante (operatorio oppure logico-discorsivo) di una molteplicità di rappresentazioni semiotiche. L'oggetto di conoscenza emerge dunque dal riconoscimento che due o più rappresentazioni sono rappresentazioni di un «medesimo oggetto» indipendentemente dai loro contenuti. La fede nella sua pre-esistenza non è necessaria, non serve. In altre parole, per Duval nessuna interpretazione filosofica (di tipo realista o idealista, costruttivista o platonica…) può essere indotta dalla sua caratterizzazione cognitiva degli oggetti matematici e dell'attività semiotica (R. Duval, comunicazione personale, 20 aprile, 2012). La pratica umana rimane la caratteristica distintiva esistenziale di un oggetto matematico.

3. Come riportato in Cassin et al. (2014), la parola greca *pragma* (tradotta in latino con *res*, spesso unita a *causa*) aveva inizialmente un significato legale e retorico (Aristotele, *Topici* 1.18, 108a21; *Retorica* 3.14, 1415b4). Essa designa non solo la realtà concreta e individuale data o immediatamente presente (esterna alla mente), ma anche il fatto o lo stato di cose in questione, il problema dibattuto o l'argomento di un discorso, il motivo o il risultato di un'attività (πρᾶξις [*praxis*], da πράσσω [*prassó*], «agire», «fare»), ovvero la cosa in relazione a un'azione.

Le rappresentazioni semiotiche, che possono focalizzare l'attenzione di un individuo su aspetti completamente opposti (dati visivi, oggetti concreti o invarianti), sono oggetti fenomenologici transitori (Duval, 2006b). Per esempio, un'equazione lineare in due variabili e la rappresentazione grafica di una retta sono due rappresentazioni semiotiche che rinviano ad aspetti completamente opposti. In esse si riconosce un medesimo oggetto matematico solo a condizione che l'attenzione si focalizzi su qualche loro invariante (le relazioni rappresentate), dunque non solo sui loro dati visivi e sulla loro organizzazione percettiva (Duval, 2006b). L'oggetto a cui rinvia una particolare organizzazione percettiva o sintattica, di una figura o di una frase, è invece un oggetto intenzionale. Per esempio ciascuno degli oggetti (forme o figure) che un individuo «vede» in una configurazione di unità figurali sovrapposte o giustapposte o in una «figura ambigua» costituisce un oggetto intenzionale. Il disegno in Figura 1 può per esempio rinviare a una particolare configurazione di sei triangoli, a un esagono, alla rappresentazione di un cubo «scheletrato» (visto dall'alto o dal basso) o alla rappresentazione di una piramide «scheletrata» a base esagonale (vista dall'alto o dal basso). Analogamente, una particolare interpretazione semantica di una frase che descrive un problema costituisce un oggetto intenzionale.

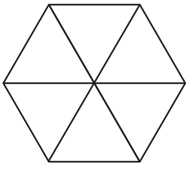

Figura 1. Che cosa rappresenta?

D'altra parte, segni e rappresentazioni semiotiche sono in un primo momento, per chi se li trova di fronte, macchie d'inchiostro su un foglio di carta, tracce di gesso sulla lavagna..., *cose* nel vero senso della parola. Dopo averli riconosciuti come *cose*, la prima domanda che ci si pone non è «Che *cosa* rappresentano?» ma, per l'appunto, «Che *cosa* sono?». In altre parole, per la persona che se li trova di fronte la prima volta non rappresentano nulla, così come non rappresenterebbero nulla in assenza dell'essere umano. Appaiono soltanto come cose concrete, oggetti nel senso del realismo *ingenuo*, dove quell' «ingenuo» non vuol dire «ingenuo in senso comune», ma si riferisce al *Naiven Realismus* così definito da Wilhelm Schuppe (1836 – 1913) (*Grundriss der Erkenntnistheorie und Logik*, 1894), cioè quello per cui si riconosce l'indipendenza concettuale dell'oggetto conosciuto dall'atto (psichico) con il quale viene conosciuto (D'Amore, 2005).

La loro *cosità* gioca dunque un ruolo del tutto rilevante per l'individuo che cerca in qualche modo di utilizzarli quando ancora, per lui, non rappresentano nulla. La mancanza di un accesso multisensoriale, diretto o strumentale (attraverso microscopi, telescopi, sensori etc.) agli oggetti matematici porta allora quasi inevitabilmente a confondere una certa rappresentazione di un certo oggetto matematico con l'oggetto stesso (Duval, 1993), generando ostacoli alla comprensione per un gran numero di studenti, e non solo.

Ma segni e rappresentazioni semiotiche possono essere tra loro confusi?

Due sono i modi completamente differenti di concepire i segni e dunque le produzioni matematiche.

Il primo modo, quello classico, è principalmente epistemologico: i segni sono considerati isolati (in assenza di sistemi semiotici) e rapportati all'oggetto a cui rinviano sulla base di tre relazioni: (a) somiglianza o no (relazione iconica/simbolica); (b) causalità (relazione indicale); (c) riferimento (irriducibile alla relazione di somiglianza o a quella di causalità), ottenuta mediante un'operazione intenzionale di designazione.

Per esempio, le prime due relazioni sono alla base della classificazione (icona, indice e simbolo) introdotta da Charles Sanders Peirce (1839–1914) per caratterizzare la relazione che un segno/*representamen* può avere con l'oggetto a cui si riferisce. Precisamente, l'*icona* mette in evidenza una relazione di somiglianza, l'*indice* una relazione di causalità (di tipo: effetto → causa), il *simbolo* una relazione che non è né di somiglianza né di causalità, ovvero una relazione posta in modo puramente convenzionale.

La terza relazione, quella di riferimento, è alla base della distinzione tra senso (*Sinn*) e significato (*Bedeutung*) di un segno (*Zeichen*) introdotta da Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 – 1925) per spiegare i meccanismi di sostituzione o trasformazione dei segni utilizzati in matematica, ovvero il modo in cui un segno possa essere sostituito da o trasformato in un altro referenzialmente equivalente (cioè con lo stesso significato, *Bedeutung*), ma non semanticamente congruente (cioè con un senso, *Sinn*, o contenuto completamente differente).

In René Descartes (1596 – 1650), invece, la relazione tra segno (rappresentazione o idea) e oggetto rappresentato è di tipo puramente causale: «ciò che costituisce [*être objectif*] un'idea deve avere una causa reale» (Descartes, 1852, p. 606).[4]

In ogni caso i segni non sono completamente distinti dalle rappresentazioni, in quanto la loro principale funzione è ridotta a quella delle rappresentazioni: stare al posto di altri oggetti o evocare oggetti assenti.

Il secondo modo di concepire i segni risale a Ferdinand de Saussure (1857–1913) ed è eminentemente strutturalista: ad avere un ruolo prioritario non sono i singoli segni considerati come segni isolati in sé, ma i *sistemi di segni* (o *sistemi semiotici*), ovvero gli insiemi di segni muniti di una *struttura*. Quest'ultima è definita dalla rete di opposizioni, differenze, valori e dall'insieme di regole organizzatrici che permettono di operare sui segni. In base a tale struttura: «*I segni presentano la possibilità di* POTER ESSERE SOSTITUITI AD ALTRI SEGNI, *indipendentemente dagli oggetti che possono evocare*» (Duval, 2011, p. 27, corsivo e maiuscoletto dell'autore). Un segno è dunque concepibile solo all'interno di un sistema di segni, vale a dire solo in opposizione ad altri segni.

Per esempio: «1», di per sé, non è un segno; non è un segno se non si specifica il sistema in cui lo si considera. È un segno nel sistema binario (per la sua opposizione alla cifra «0» del sistema binario), oppure nel sistema decimale (per la sua opposizione alle altre nove cifre del sistema decimale) etc.; al di fuori del sistema da cui riceve il valore di segno è soltanto una macchia, priva di senso, non rappresenta alcun numero, nulla.

4. Tutte le citazioni in italiano di autori non italiani sono traduzioni nostre.

Un altro esempio interessante: nella lingua Shuar, il numero sette si scrive 7 e si legge «tsenken», cioè «bastone con un gancio per raccogliere la frutta», con la forma, appunto, della cifra 7. Dunque «7» di per sé non è un segno, bisogna dargli un contesto; nel contesto contadino (sistema della lingua naturale) è un «tsenken», nel contesto aritmetico (sistema decimale) è un sette (per approfondire si veda: D'Amore, 2002).

D'altra parte, il segno «1» del sistema binario o di quello decimale costituisce anche una rappresentazione semiotica del numero «uno» e si oppone ad altri tipi di rappresentazioni del medesimo numero prodotte da sistemi differenti, come quelle ottenute mediante abaci, *reglettes*, gesti, fiammiferi o sassolini, che funzionano non come segni, ma come *pseudo-oggetti* manipolabili concretamente, ovvero come marchi-unità. Tali rappresentazioni di tipo «concreto» o iconico svolgono principalmente una funzione di supporto visivo o materiale per alcune particolari operazioni. Esse richiedono in ogni caso l'articolazione con la lingua naturale o una scrittura simbolica (cioè con un registro semiotico) per esplicitare o effettuare le operazioni. (Per approfondire si veda: D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013; Duval, 2006c).

In modo analogo, le rappresentazioni del numero «nove» in un sistema di numerazione posizionale, per esempio nel sistema decimale, così come si oppongono alle rappresentazioni iconiche del numero «nove» ottenute mediante *reglettes*, indipendentemente dalla disposizione spaziale delle *reglettes*, si oppongono anche alle rappresentazioni del medesimo numero nel sistema di numerazione latino, che non è né posizionale, né additivo, ma qualcosa di intermedio. In tale sistema di numerazione, infatti, il principio di addizione, utilizzato per esempio in III, VI, XII, è spesso accompagnato dal principio di sottrazione, nel caso in cui un segno sia posto alla sinistra di un altro di valore maggiore, come in IX, XC, CM. In qualche caso però si utilizza anche il principio di moltiplicazione, in base al quale VM non starebbe per 1000–5, ma per 5000 (Cajori, 2007). In altre parole, il valore dei segni non varia allo stesso modo a seconda delle loro posizioni. In ogni caso, i segni del sistema di numerazione latino si caratterizzano sia per i loro valori oppositivi agli altri segni del sistema sia per le regole organizzatrici che determinano il loro uso e le loro combinazioni per la designazione di numeri. A differenza dei sistemi di numerazione posizionali, le rappresentazioni nel sistema di numerazione latino, come le rappresentazioni iconiche ottenute mediante abaci, *reglettes*, fiammiferi o sassolini, non richiedono l'uso di un segno specifico per designare un posto vuoto, il numero «zero», rendendo le operazioni piuttosto difficoltose o complesse. (Per approfondire si veda: D'Amore & Matteuzzi, 1976).

Come emerge dagli esempi sopra riportati, l'uso dei segni non è subordinato agli oggetti che i segni possono designare ma è vincolato al sistema che li produce, ovvero alla struttura di opposizioni interne che si considera, o che si ritiene più adeguata o efficace in determinati contesti, anche da un punto di vista meramente segnico (per esempio, nel caso delle operazioni, la struttura del sistema decimale è più efficace di quella del sistema di numerazione latino, per la presenza dello «zero»). Tale struttura determina le possibilità di trasformazione dei segni all'interno del sistema stesso cioè, in termini duvaliani, la funzione cognitiva di *trattamento* per la produzione di nuove conoscenze.

In matematica, il riferimento di un segno a un oggetto risulta soltanto da un'operazione esplicita di designazione, non da una relazione di causalità. In altre parole, le rappresentazioni semiotiche di un oggetto matematico O non sono causate dall'oggetto O, così come non sono l'effetto o l'evocazione di O. Si tratta di un punto importante ma spesso trascurato: la relazione tra le rappresentazioni semiotiche e l'oggetto matematico rappresentato non è definita in termini di causalità, ma di riferimento attraverso l'uso intenzionale di espressioni o frasi, ovvero attraverso *operazioni discorsive intenzionali di designazione*. Per esempio, nella descrizione della costruzione di una particolare figura geometrica del piano, le frasi: «Sia *r* la retta perpendicolare al segmento AB nel suo punto medio», «Sia *r* l'asse del segmento AB», «Sia *r* il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da A e B»… permettono di designare intenzionalmente con la lettera «*r*» (e non con la lettera «*a*» o altro) un particolare oggetto matematico che interviene nel processo di costruzione della figura. Si tratta di un'operazione discorsiva intenzionale di designazione che, come si è mostrato, può essere effettuata attraverso l'uso di frasi differenti, cioè con sensi completamente differenti, seppur referenzialmente equivalenti. In ogni caso: «La relazione di riferimento di un segno o di una combinazione di segni a un oggetto risulta da un'operazione discorsiva di designazione» (Duval, 2006c, p. 52), non da una relazione di causalità.

Sulla base della concezione di sistema di segni di de Saussure e della distinzione tra senso (*Sinn*) e significato (*Bedeutung*) di Frege, Duval (2006a) definisce un *sistema semiotico* come un insieme di elementi (segni) che assumono valore di senso solo in opposizione di scelta ad altri elementi e di regole organizzatrici che permettono di effettuare operazioni intenzionali di designazione e di combinare o raggruppare gli elementi in unità significanti (espressioni o unità figurali). Un *segno* è dunque concepito come una entità (parola, disegno, gesto etc.) intenzionalmente prodotta all'interno di un dato sistema semiotico per soddisfare una funzione di comunicazione. Non si identifica con una rappresentazione, in quanto il suo uso non è subordinato alla sola designazione di oggetti. Ci sono infatti situazioni in cui i segni non evocano di per sé alcun oggetto, ma sostituiscono semplicemente altri segni, come in algebra quando si utilizzano lettere per sostituire un dato insieme di possibili valori numerici, oppure nei codici che correlano termine a termine due liste di elementi (Eco, 1975, Capitolo 2). La possibilità di sostituire segni con altri segni non dipende necessariamente dalla conoscenza degli eventuali oggetti rappresentati, ma dal sistema produttore.

Per esempio: la frazione 3/6, che i bambini di V primaria forniscono senza difficoltà come rappresentazione della probabilità di ottenere un numero pari nel lancio di un dado a sei facce (D'Amore, 2006a, 2006b; 2007a, 2007b), può essere sostituita dalla frazione 4/8, ad essa equivalente, senza dover necessariamente tener conto dell'eventuale oggetto rappresentato. Anzi, come i lavori di ricerca sopra citati dimostrano, la conoscenza dell'oggetto rappresentato («la probabilità di avere una uscita pari nel lancio di un dado a sei facce») ostacola fortemente tale sostituzione, seppur perfettamente legittima nel sistema della scrittura frazionaria.

Analogamente, la sostituzione dell'equazione $-2x + y + 4 = 0$ con l'equazione $y = 2x - 4$ è strettamente legata al sistema della scrittura algebrica, ovvero ai trattamenti che tale sistema permette di effettuare, non dipende dalla conoscenza dell'oggetto rappresentato.

L'approccio di Duval ai segni, in linea con quello di de Saussure, si allontana dunque notevolmente dall'approccio peirceano nel quale, come si è detto, i segni sono concepiti sempre in relazione a un oggetto e dunque confusi con le rappresentazioni. La classificazione dei segni di Peirce, d'altra parte, non risulta sufficientemente discriminante nell'analisi delle produzioni matematiche: non permette per esempio di distinguere, fra le icone che evidenziano una struttura di tipo «diagramma» (in senso peirceano), le frasi, le equazioni, le figure geometriche e i grafici. Come mai?

L'uso del termine «diagramma» [dal greco διάγραμμα (*diagramma*), «ciò che è tracciato per mezzo di linee», «disegno»], da parte di Peirce, non è in alcun modo ristretto alle rappresentazioni grafiche che l'etimologia del termine suggerisce. Esso differisce dunque dall'uso comune che contrappone il diagramma inteso come rappresentazione grafica o pittorica alle rappresentazioni prodotte nella lingua naturale. Tale distinzione non esiste per Peirce (Hoffmann, 2010). Un diagramma ha soltanto due caratteristiche fondamentali: rappresenta relazioni ed è «effettuato su un sistema di rappresentazione perfettamente coerente» (CP 4.418, ca. 1903).[5] La sua somiglianza all'oggetto rappresentato è di tipo strutturale o relazionale. Da qui la sua iconicità. Un diagramma costituisce infatti un tipo speciale di icona che rappresenta la struttura del suo oggetto in termini delle relazioni che sussistono tra le sue parti. Queste ultime possono essere soggette a manipolazioni o esperimenti anche puramente mentali per rendere esplicite o dedurre nuove relazioni (EP 1:227, 1885).[6] Per esempio, quando:

– si deduce la tesi di un teorema a partire dalle ipotesi;
– in un disegno si vedono figure che in realtà non sono presenti;
– in un dipinto si stima la distanza tra gli oggetti rappresentati;
– si riconosce l'impossibilità della costruzione tridimensionale di particolari oggetti dipinti, oppure l'impossibilità di determinate prospettive;
– osservando un dipinto da diverse posizioni, si individua la posizione dalla quale è possibile riconoscere un'immagine che risulta invece deformata o incomprensibile se osservata da altre posizioni.[7]

In tutti questi casi si tratta di manipolare diagrammi (anche solo mentalmente) in base alle regole di «un sistema di rappresentazione perfettamente coerente» (CP 4.418, ca. 1903).

Per Peirce, la manipolazione di un dipinto non è differente dalla manipolazione di una figura geometrica, di un'equazione, di un'asserzione algebrica o di una frase che permette di rivelare ulteriori relazioni rispetto a quelle immediatamente osservabili.

La disposizione delle parole in una frase e, più in generale, la sintassi di un linguaggio non è arbitraria ma riflette, per Peirce, una certa iconicità rispetto alla struttura degli oggetti (o dei fatti) rappresentati: «Nella sintassi di ogni linguaggio ci sono icone logiche che sono aiutate ad essere tali da regole convenzionali» (PW 106).[8] L'iconicità tra la sintassi di un linguaggio e quella degli oggetti (o dei fatti) rappresentati è dunque parziale, a causa dell'interazione di elementi iconici (di tipo strutturale) e simbolici («regole convenzionali») nell'uso del linguaggio, ma è ciò che ne permette la comprensione: «Ciò che noi chiamiamo 'fatto' è qualcosa che ha la struttura di una propo-

5. CP x.xxx (volume.paragrafo) = *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*.
6. EP x:xxx (volume:pagina) = *The Essential Peirce*.
7. Una ricca e interessante raccolta di esempi di prospettive impossibili e di anamorfosi, al confine tra arte e matematica, si trova in D'Amore (2015).
8. PW xxx (pagina) = *Philosophical Writings of Peirce*.

sizione, ma è supposto essere un elemento dell'universo stesso» (NEM 4:239).[9]

Nell'approccio di Duval, invece, i segni funzionano solo in opposizione ad altri segni, ovvero all'interno di un sistema semiotico, indipendentemente da qualsiasi riferimento a un oggetto. Il criterio di classificazione si basa non sulla relazione tra il contenuto di un segno (rappresentazione) e l'oggetto a cui rinvia, ma sulle funzioni cognitive soddisfatte dai tipi di trasformazione (*trattamenti*) che si possono effettuare all'interno di un dato, fissato, stabilito sistema semiotico. Duval distingue in tal modo, come vedremo, quattro tipologie di sistemi semiotici, o meglio *registri di rappresentazione*. Vediamo nello specifico in che modo.

Un *registro di rappresentazione*, così come lo caratterizza Duval (1996), è un sistema semiotico che soddisfa funzioni di:

- *comunicazione*;
- *oggettivazione* (per sé stessi, non per la comunicazione);
- *trattamento* (trasformazione di una rappresentazione in un'altra rappresentazione all'interno dello stesso sistema semiotico, in funzione delle possibilità specifiche di trasformazione che il sistema semiotico permette di effettuare, per ottenere nuove informazioni).

Comune a tutte le rappresentazioni semiotiche, la funzione di *oggettivazione* (dal latino *obiectum*, «ciò che è posto davanti», e *facere*, «fare», dunque con il significato etimologico complessivo di «porre qualcosa davanti a qualcuno per renderlo apparente, ovvero presente ai sensi») consiste in una presa di coscienza di ciò, di un oggetto, di cui non si era coscienti prima di produrre (per sé stessi) una rappresentazione (Duval, 1995). L'oggettivazione è come un lampo di intuizione, è per sé stessi, non è la comunicazione ad altri né serve per crearla, è un fatto intrinseco personale; è necessaria ma non sufficiente per la costruzione cognitiva personale dell'oggetto matematico. Può riguardare non solo il modo di riconoscere l'oggetto, ma anche il modo di riconoscere il tipo di trattamento da effettuare nel registro più opportuno.

Per esempio, nella risoluzione di un problema, lo studente che non è in grado di riconoscere il procedimento o l'operazione più efficace in quella data situazione tende spesso a utilizzare tutto quello che gli viene in mente al riguardo (teoremi, formule, metodi utilizzati in altre situazioni etc.). Nelle parole di una partecipante alla nostra ricerca, lo studente in difficoltà cerca di «riportare contemporaneamente tutte le proprietà che sa essere relative all'oggetto senza saper scegliere quelle necessarie al caso specifico». Per esempio, se deve determinare la lunghezza della corda individuata da due circonferenze secanti, «lo studente cerca di applicare teoremi relativi al confronto tra la lunghezza delle corde, alla loro distanza dal centro, al fatto che la corda nel punto medio è perpendicolare al raggio, senza pensare, più semplicemente, a risolvere il sistema formato dalle due equazioni». In altre parole, lo studente in difficoltà non sa riconoscere il registro più opportuno e il trattamento più efficace da effettuare in quella data situazione. Segno, questo, di una mancata presa di coscienza degli oggetti coinvolti nella risoluzione del problema, ovvero di una mancata oggettivazione.

Il *trattamento* (trasformazione di una rappresentazione semiotica in un'altra dello stesso registro, del medesimo oggetto) e la *conversione* (trasformazione

9. NEM x:xxx (volume:pagina) = *The New Elements of Mathematics*.

di una rappresentazione semiotica di un determinato oggetto in un'altra, di un altro registro) sono strettamente legati alla funzione di oggettivazione: rendono possibile o evidenziano una presa di coscienza delle diverse relazioni tra le rappresentazioni semiotiche di un medesimo oggetto nel medesimo registro o in registri differenti, rispettivamente.

Tuttavia, come afferma Duval (1995), l'oggettivazione si accompagna spesso a una produzione di rappresentazioni semiotiche che può apparire insufficiente, inaccettabile o incomprensibile dal punto di vista della funzione di comunicazione. Per esempio, è ben nota agli insegnanti la tendenza dello studente ad abbreviare, comprimere, sottintendere, oppure omettere calcoli, notazioni, procedure, ragionamenti; a disegnare figure e grafici in modo approssimativo e affrettato; a interpretare erroneamente il senso di certi segni, per esempio quello del segno «=» usato spesso in senso procedurale anziché relazionale (Camici et al., 2002); e così via.

D'altra parte, la produzione di rappresentazioni semiotiche può essere soddisfacente dal punto di vista della comunicazione, ma non corrispondere ad alcuna oggettivazione da parte del soggetto che la produce. Per esempio, uno studente che fornisce una definizione precisa di un oggetto matematico dimostra di conoscere le parole e la sintassi della definizione dell'oggetto; se non è in grado di utilizzarla in situazioni significative, non dimostra di aver preso coscienza dell'oggetto, e tantomeno di averlo costruito cognitivamente. Analogamente, uno studente in grado di trasformare l'equazione implicita di una retta nell'equazione esplicita non dimostra di aver preso coscienza della geometria della retta; dimostra solo di essere in grado di effettuare un trattamento algebrico dell'equazione implicita. Allo stesso modo, il calcolo del limite di una funzione, svolto correttamente, non dimostra una presa di coscienza del concetto di limite della funzione; dimostra solo la conoscenza di un suo specifico trattamento algebrico. E così via.

Per essere in grado di comprendere o cominciare a comprendere un oggetto matematico, cioè per la sua oggettivazione, un solo registro non basta, non è sufficiente. L'oggettivazione è inscindibile dal riconoscimento di almeno due registri di rappresentazione dell'oggetto e della loro articolazione sinergica; cioè è inscindibile dal riconoscimento di un medesimo oggetto matematico in almeno due registri differenti. Ma tale presa di coscienza è indipendente dalla capacità di comunicarla. In altre parole, la funzione di oggettivazione è indipendente da quella di comunicazione.

Duval (2006a, 2006b, 2011) distingue quattro tipi di registri di rappresentazione:

Registri discorsivi

- *multifunzionali*
  [lingue naturali (scritte o parlate): per la designazione di oggetti, il ragionamento o l'enunciazione];
- *monofunzionali*
  (scritture simboliche: sistemi di numerazione, scrittura algebrica, linguaggi formali);

Registri non discorsivi

– *multifunzionali*
  [di tipo *iconico*: disegni che conservano le «relazioni di vicinanza» tra le parti dell'oggetto;[10] di tipo *non-iconico*: configurazioni geometriche (costruzione, divisione e riconfigurazione, decostruzione dimensionale di forme)];
– *monofunzionali*
  (configurazioni 2D di forme 1D o 0D secondo regole, grafici cartesiani).

I registri discorsivi, a differenza di quelli non discorsivi, hanno una struttura simile a quella delle lingue naturali; rendono in particolare possibili le operazioni di *enunciazione* (dire qualcosa per qualche scopo), *designazione* (indicare qualcosa con un termine opportuno) ed *espansione discorsiva* (articolare frasi in una unità coerente, come il ragionamento, la descrizione o spiegazione).

I registri monofunzionali sono propri della matematica: in essi i trattamenti possono assumere la forma di algoritmo come spesso capita nell'algebra di scuola. I registri multifunzionali, invece, sono utilizzati anche al di fuori della matematica per soddisfare funzioni di comunicazione o di oggettivazione, e non principalmente, o raramente, funzioni di trattamento; in essi i trattamenti non possono essere posti sotto forma di algoritmo, in quanto la grande varietà di operazioni discorsive (enunciati, designazioni, ragionamenti, descrizioni, spiegazioni etc.) e non discorsive (illustrazioni, manipolazioni, costruzioni o decostruzioni di figure) che essi permettono di effettuare è irriducibile a un insieme di istruzioni o di regole. Per esempio, per giustificare la formula dell'area del trapezio si possono effettuare differenti trattamenti nel registro multifunzionale della lingua naturale e, allo stesso tempo, nel registro multifunzionale delle configurazioni geometriche; lasciamo al lettore il compito di individuarne alcuni.

2.2. Aspetti di una rappresentazione semiotica

In matematica il processo di comprensione comincia con il riconoscimento della corrispondenza tra rappresentazioni differenti di un medesimo oggetto in registri differenti (Duval, 1995) o nel medesimo registro (D'Amore, 2006a, 2006b, 2007a, 2007b; Rojas Garzón, 2014; Santi, 2010). Come evidenzia Duval (2011): «*comprendere non è decodificare una sequenza di parole o di frasi, ma discriminare le unità di senso* [unità di contenuto] *in funzione dei differenti livelli di organizzazione dei discorsi ed eventualmente riformularli*» (p. 75, corsivo dell'autore). In altre parole, «*in matematica, non pensiamo mai in un unico registro, ma in vari allo stesso tempo*, anche se le produzioni privilegiano un unico registro» (Duval, 2011, p. 116, corsivo dell'autore).

La gestione delle rappresentazioni semiotiche di oggetti matematici dipende dunque fortemente dalla comprensione del ruolo giocato dalle loro diverse unità

10. Per esempio, in un volto umano disegnato (rappresentazione di tipo iconico), gli occhi, il naso e la bocca tendono a conservare la relazione di vicinanza tra gli occhi, il naso e la bocca del volto umano reale (*oggetto* della rappresentazione), anche se le suddette parti della rappresentazione possono avere forme completamente differenti da quelle dell'oggetto della rappresentazione, forme stilizzate o fantasiose.

di contenuto. Tali unità di contenuto determinano le varie componenti o i differenti aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali ci si può focalizzare nella gestione della rappresentazione. Tra quelli più significativi per l'apprendimento abbiamo individuato (attingendo in parte alla classificazione dei segni di Peirce) i seguenti aspetti:

- *iconico-qualitativi* (aspetti concreti o di somiglianza della rappresentazione con qualcos'altro di concreto);
- *iconico-strutturali* (aspetti della rappresentazione legati alla sua costruzione, a proprietà o a teoremi);
- *di analogia* (aspetti della rappresentazione posti in rapporto, non necessariamente di somiglianza iconica, con il linguaggio quotidiano o l'esperienza sensibile);
- *indicali* (aspetti di rinvio a qualcos'altro, come a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico o a proprietà);
- *simbolici* (aspetti convenzionali della rappresentazione, come quelli legati a notazioni, definizioni, regole o vincoli d'uso).

La comprensione del loro ruolo è tutt'altro che spontanea e banale, come emerge anche dalla nostra ricerca. D'altra parte, su di essa si fonda il riconoscimento della corrispondenza tra le unità di contenuto di rappresentazioni differenti di un medesimo oggetto in registri differenti o nel medesimo registro, nelle trasformazioni di conversione e di trattamento, rispettivamente.

3. Domande di ricerca

L'obiettivo generale della nostra ricerca (§2) è stato tradotto nelle seguenti domande di ricerca:

D1. L'insegnante è consapevole della distinzione tra oggetto matematico (pre-definito, pre-costituito dalla istituzione) e una sua rappresentazione semiotica? In altre parole, per riferirsi a un oggetto matematico l'insegnante fornisce *intenzionalmente* diverse sue rappresentazioni possibili? Se sì, che tipo di registro utilizza più di frequente?

D2. L'insegnante riconosce i diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente in grado di gestirla può focalizzarsi? Se sì, a quali di essi attribuisce l'apprendimento dello studente?

D3. L'insegnante riconosce i diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà può focalizzarsi? Se sì, a quali di essi attribuisce le difficoltà di apprendimento dello studente?

D4. L'insegnante avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti (*representamen*) di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto? Se sì, come li giustifica o a quali cause li riconduce?

Per rispondere a tali domande, l'approccio semio-cognitivo di Duval è stato integrato localmente (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008; Radford, 2008) con l'approccio semiotico-interpretativo di tradizione peirceana per la caratterizzazione di alcuni aspetti delle rappresentazioni semiotiche presi in esame nella ricerca

(§2.2), e con la teoria antropologica della didattica (Chevallard, 1992) per quanto concerne la *trasposizione didattica* (Chevallard, 1985) degli oggetti matematici, ovvero l'adattamento del Sapere (quello accademico, accettato dalla comunità dei matematici) al sapere da insegnare, e quindi la *dimensione istituzionale* della conoscenza matematica, ovvero le pratiche che una data istituzione (università, scuola, società…) considera appropriate per l'insegnamento-apprendimento della matematica.

4. Processo di ricerca

Poiché la ricerca aveva finalità prettamente esplorative, descrittive e interpretative, l'approccio di ricerca è stato principalmente qualitativo.

In accordo con il *paradigma di ricerca pragmatista* (Tashakkori & Teddlie, 2003),[11] la metodologia si è basata sulle domande di ricerca all'interno di un *disegno di ricerca a metodi misti* (Tashakkori & Teddlie, 1998). In altre parole, gli approcci di ricerca qualitativi e quantitativi sono stati combinati in un unico studio assegnando priorità all'approccio qualitativo, in modo da ottenere le migliori possibilità di risposta alle domande di ricerca, tenendo conto dei fattori contingenti (vincoli economici e di tempo) e contestuali (vincoli situazionali) alla ricerca. In particolare, lo studio si è basato su un disegno a metodi misti sequenziale a due fasi, nel quale la prima fase era principalmente qualitativa mentre la seconda solo qualitativa, cioè un disegno a metodi misti del tipo: QUAL + quan → QUAL.[12]

Per la raccolta dei dati sono stati utilizzati tre metodi di rilevazione: un questionario semi-strutturato o, in alternativa, un'intervista semi-strutturata nella prima fase (QUAL + quan), e interviste non strutturate nella seconda fase (QUAL).

La ricerca, durata oltre due anni, si è focalizzata sull'insegnante di scuola primaria e di scuola secondaria di primo e di secondo grado, in Italia.

Il questionario era costituito da dieci domande articolate in più quesiti, in gran parte a risposta aperta. Alcune erano formulate in modo da permettere al partecipante di aggiungere alternative o commenti. Il questionario è stato adattato al tipo di scuola (primaria, secondaria di primo e di secondo grado) di appartenenza dell'insegnante, ed è stato inviato per posta elettronica. In un primo momento è stato testato su un piccolo campione di quattro insegnanti, scelto sulla base della competenza professionale in matematica e in didattica della matematica, oltre che della disponibilità a partecipare alla ricerca. Successivamente, il questionario è stato inviato al campione più ampio di insegnanti, scelto soprattutto sulla base della disponibilità a partecipare alla ricerca. I partecipanti effettivi alla ricerca sono stati i seguenti: 11 insegnanti di scuola primaria, 11 insegnanti di scuola secondaria di primo grado e 5 insegnanti di scuola secondaria di secondo grado.

---

11. Sulla divergenza tra le teorie realiste e pragmatiste in didattica della matematica si veda: D'Amore e Godino (2006).
12. «qual» sta per qualitativo, «quan» sta per quantitativo, «+» sta per simultaneo, «→» sta per sequenziale; le lettere maiuscole denotano una priorità elevata, le lettere minuscole denotano una priorità bassa delle componenti qualitativa e quantitativa dello studio in una ricerca di tipo misto (Morse, 1991; Tashakkori & Teddlie, 1998).

È bene precisare che la nostra ricerca, interessata soprattutto a cogliere i significati o i sensi che gli insegnanti attribuiscono ai processi di apprendimento della matematica sulla base della loro formazione professionale e delle loro esperienze personali, ha richiesto un'analisi molto fine, profonda, particolareggiata, dettagliata, anche incrociata, delle risposte alle domande del questionario e delle interviste, che un campione molto ampio non avrebbe permesso di effettuare. D'altra parte, come risulta da varie ricerche sulle dimensioni dei campioni negli studi che utilizzano approcci di tipo qualitativo (per esempio: Mason, 2010), i campioni molto ampi, che superano le 30 unità, nella maggior parte dei casi non forniscono nuove informazioni rispetto ai campioni più piccoli, di 20-30 unità.

Lo scopo principale del questionario e delle interviste è stato quello di stimolare nell'insegnante una riflessione su alcune importanti questioni strettamente legate alle domande di ricerca; una riflessione sulla propria pratica che potesse in qualche modo evidenziare la sua consapevolezza della dimensione semiotica e cognitiva implicata nel processo di apprendimento della matematica. Il contenuto del questionario somministrato agli insegnanti è descritto sinteticamente qui di seguito.

Nella prima parte, si chiedeva all'insegnante di (1) scegliere un campo di studio della matematica (per esempio, nel caso della scuola primaria: geometria piana, geometria solida, aritmetica, linguaggio degli insiemi, trasformazioni geometriche nel piano, calcolo combinatorio, calcolo delle probabilità, statistica, algebra, geometria analitica o un altro campo di studio prescelto dall'insegnante). Nel campo di studio scelto, l'insegnante doveva (2) individuare una particolare rappresentazione R, in un dato registro, di un oggetto matematico O che un determinato studente X (da lui stesso identificato) riconosce o gestisce con molta difficoltà. Per evitare interpretazioni errate o fuorvianti delle domande, nella parte introduttiva del questionario era stato specificato in forma sintetica il senso attribuito all'espressione «oggetto matematico», ben consapevoli del fatto che potesse non essere quello attribuito spontaneamente o fatto proprio da tutti gli insegnanti. L'insegnante doveva poi (3) indicare gli aspetti della rappresentazione R sui quali lo stesso studente X focalizza maggiormente la sua attenzione, scegliendoli tra quelli elencati nel questionario oppure suggerendone altri. Successivamente, doveva (4) indicare quali, tra gli aspetti indicati al punto precedente, riteneva fossero da ricondurre, in massima parte, le difficoltà che incontra lo studente X nell'uso della rappresentazione R.

Si chiedeva poi all'insegnante di pensare a un altro studente Y, della stessa classe di X, che non incontra alcuna difficolta, o che incontra soltanto alcune difficoltà che l'insegnante ritiene poco significative, nell'uso della rappresentazione R. Come nel caso dello studente X, l'insegnante doveva (5) indicare gli aspetti della rappresentazione R sui quali lo studente Y focalizza maggiormente la sua attenzione, scegliendoli tra quelli elencati nel questionario oppure suggerendone altri; (6) indicare quali, tra gli aspetti indicati al punto precedente, riteneva fosse da ricondurre, in massima parte, la capacità dello studente Y di utilizzare la rappresentazione.

Gli aspetti della rappresentazione R elencati nel questionario erano i seguenti:

a) aspetti concreti, legati alla sua forma, dimensione, colore, posizione etc.;
b) somiglianza di R con qualcos'altro di concreto;
c) aspetti strutturali, come quelli legati:
    c1) alla costruzione di R (per esempio: Come disegnare o costruire una figura? Come tracciare un grafico? Come scrivere o ricavare una formula, un'espressione, un'equazione, una funzione etc.?)
    c2) a proprietà
    c3) a teoremi;
d) aspetti legati al linguaggio quotidiano o all'esperienza sensibile;
e) aspetti di rinvio a qualcos'altro (a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, a proprietà etc.);
f) aspetti convenzionali, legati a:
    f1) notazioni
    f1) definizioni
    f1) regole o vincoli d'uso.

Si chiedeva in ogni caso di fornire anche qualche esempio specifico.

Nelle domande relative ai punti (3), (4), (5) e (6) sopra indicati, le alternative «a» e «b» sono state poste in relazione con gli aspetti iconico-qualitativi della rappresentazione R; l'alternativa «c» è stata posta in relazione con gli aspetti iconico-strutturali; le alternative «b» e «d» sono state poste in relazione con gli aspetti di analogia; l'alternativa «e» è stata posta in relazione con gli aspetti indicali; l'alternativa «f» è stata posta in relazione con gli aspetti simbolici di R.

Nella seconda parte del questionario si chiedeva all'insegnante di scegliere, tra le rappresentazioni semiotiche elencate nel questionario, quella (RX) che riteneva più problematica per lo studente X. In corrispondenza di RX doveva individuare, sempre dal punto di vista dello studente X:

I. le eventuali rappresentazioni semiotiche che per lo studente X mostrano una certa somiglianza (sotto qualche aspetto) con RX;
II. le eventuali rappresentazioni con le quali RX può essere confusa;
III. le eventuali convenzioni (regole, vincoli, limiti d'uso…) per l'uso di RX, delle quali lo studente X è ben consapevole;
IV. i principali contesti nei quali lo studente X utilizza la rappresentazione RX;
V. la complessità d'interpretazione e d'uso (in relazione ai contesti considerati) di RX, per lo studente X, scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

L'argomento relativamente nuovo e le domande molto articolate hanno reso il questionario particolarmente lungo e impegnativo per l'insegnante. In ogni caso, lo hanno costretto a riflettere da un punto di vista nuovo, per lui insolito e inusuale, su una dimensione specifica dell'apprendimento, una dimensione in grado di svelare la complessità dei processi di comprensione sottostanti le attività matematiche che il punto di vista matematico (focalizzato principalmente sui contenuti matematici da veicolare), da solo, spesso nasconde.

5. Risposte alle domande di ricerca

Le risposte alle domande di ricerca sono state ricavate dall'analisi qualitativa e quantitativa dei dati ottenuti dal questionario e dalle interviste effettuate nel corso della ricerca. I dettagli dell'analisi, che qui tralasciamo per brevità, sono riportati in Iori (2015).

Le notazioni utilizzate nel seguito sono le seguenti:
Tn = insegnante n, essendo n l'n-esimo insegnante (in ordine di tempo) che ha completato il questionario;
SP = scuola primaria;
SS I = scuola secondaria di primo grado;
SS II = scuola secondaria di secondo grado;
Ric = ricercatore/intervistatore.

Altri segni grafici utilizzati nella trascrizione delle interviste:
… = esitazioni, pause brevi;
[…] = omissione di una parte del discorso;
italico = indica qualche forma di enfasi, attraverso il tono della voce;
[NC] = note comprendenti / piccole spiegazioni del ricercatore.

Le risposte alle domande di ricerca D1, D2, D3 e D4 (§3) sono riportate nei paragrafi 5.1., 5.2., 5.3. e 5.4., rispettivamente.

5.1. Oggetti, rappresentazioni e registri di rappresentazione

La consapevolezza della distinzione tra oggetto matematico (pre-definito, pre-costituito dalla istituzione) e una sua rappresentazione semiotica è stata rilevata sulla base delle risposte dell'insegnante alle domande n. 1a («A quale oggetto matematico O hai pensato?») e n. 2 («Quale rappresentazione R dell'oggetto matematico O lo studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà, pur impegnandosi molto nelle attività matematiche?») e alle altre domande del questionario ad esse strettamente legate, contenenti almeno due rappresentazioni semiotiche differenti di un medesimo oggetto matematico.

Dall'analisi delle risposte è emerso che l'insegnante, soprattutto di scuola secondaria, manifesta di essere consapevole della distinzione tra il livello a cui si colloca l'oggetto matematico O e il livello a cui si colloca una sua rappresentazione R(O) ma, nella maggior parte dei casi, interpreta in modo personale o per semplice assonanza il significato di alcune espressioni chiave, come «oggetto matematico», «rappresentazione semiotica» e «registro di rappresentazione». Inevitabilmente, in mancanza di una preparazione specifica su argomenti di semiotica, le risposte dell'insegnante denotano un uso non specialistico di tali espressioni. Per esempio, da esse risulta che l'idea di oggetto matematico, se non è esplicitamente confusa con quella di rappresentazione semiotica, rimane vincolata alla situazione in esame, a rappresentazioni specifiche o loro trasformazioni (trattamenti o conversioni), a definizioni o teoremi; in tutti i casi rimane distante dall'idea di invariante di rappresentazioni. Rappresentazioni semiotiche (del medesimo oggetto) tra loro *non congruenti* (cioè non «simili» per qualche aspetto) ovvero *cognitivamente distanti* (cioè relativamente distanti da un punto di vista cognitivo) sono spesso associate a oggetti matematici differenti.

Di conseguenza, la consapevolezza della distinzione tra il livello a cui si colloca l'oggetto matematico e il livello a cui si colloca una sua rappresentazione semiotica, nel quadro teorico di questa ricerca, non è potuta emergere in tutta la sua specificità e profondità. In ogni caso non può dirsi pienamente raggiunta. Ma proprio ciò fornisce materiale di studio per future più specifiche ricerche.

Alcuni esempi

T1 (SP) ha fornito la stessa risposta («frazioni») alle domande n. 1a e 2, identificando l'oggetto O denominato «frazioni» con la rappresentazione «frazioni» nel registro della lingua naturale. Durante l'intervista, T1 ha confermato la sua risposta:

Ric: Per te c'è una qualche differenza tra queste due risposte?

T1: Se ti devo dare la risposta istintiva… No. No perché, è come se il titolo stesso avesse procurato in questo studente un blocco. Non so spiegarmi… Ora, mi diventa molto difficile dirti… [Rilegge le domande] A quale oggetto matematico hai pensato, la frazione. Quale rappresentazione R, non te la so poi dire. Cioè non riesco ad approfondire, capisci? Perché ti potrei, e sarebbe assurdo, dirti qualunque rappresentazione. Quindi quella numerica, quella del ragionamento astratto, quella concettuale, quella semiotica addirittura molte volte, forse è l'unica… […] Ah, ecco! L'oggetto e la rappresentazione, per questo bambino, secondo me, coincidevano, oppure si fondevano l'una nell'altra.

In T1 è presente l'idea che ci siano diverse rappresentazioni di un medesimo oggetto, anche se l'idea di «rappresentazione» è un po' confusa. In ogni caso, secondo T1, «l'oggetto e la rappresentazione», per lo studente in questione, coincidono o si fondono l'una nell'altra.

T2 (SP), in un primo momento, ha identificato l'oggetto matematico O della domanda n. 1a con una rappresentazione nel piano di un oggetto 3D (Figura 2), ovvero con una sua rappresentazione nel registro delle configurazioni geometriche.

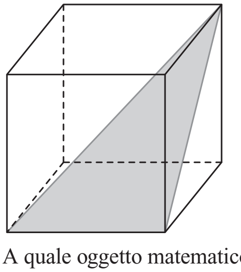

Figura 2. A quale oggetto matematico O hai pensato?

Successivamente, stimolata a dire qualcosa di più al riguardo, ha affiancato al disegno un'altra rappresentazione nel registro della lingua naturale: «Oggetto: rappresentazione 2D di un triangolo in un cubo». Come rappresentazione semiotica R di O (domanda n. 2), T2 ha fornito una proprietà dell'oggetto: «La perpendicolarità tra uno spigolo e la diagonale, di una faccia, che ha un estremo in comune con esso». Dall'intervista è poi emerso che T2 voleva identificare la rappresentazione R con la lettura di una particolare unità di contenuto del disegno in Figura 2. Una unità di contenuto (il triangolo in Figura 2) nella quale si confondono aspetti iconico-qualitativi (aspetti concreti legati alla sua forma 2D), aspetti iconico-strutturali (legati soprattutto a proprietà), aspetti indicali (di rinvio a un'altra rappresentazione in 3D e alle sue proprietà). D'altra parte, la lettura di una tale unità di contenuto richiede trattamenti e conversioni (anche se solo mentali) della rappresentazione da parte del soggetto (lo studente) che cerca di metterla in corrispondenza con qualche altra rappresentazione a lui nota. Da qui l'identificazione della rappresentazione R con una trasformazione di rappresentazioni.

T26 (SP) ha scelto come oggetto O (domanda n. 1a) «la rappresentazione di una frazione inserita in un contesto problematico» fornendo al riguardo tre esempi di produzioni dei suoi studenti; uno di questi è riportato in Figura 3.

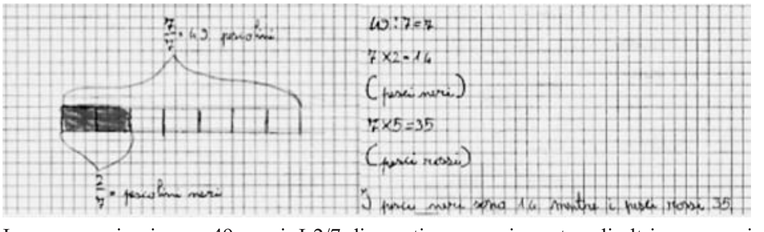

Figura 3. In un acquario ci sono 49 pesci. I 2/7 di questi sono neri mentre gli altri sono rossi. Quanti sono i pesci neri? Quanti sono i pesci rossi?

La rappresentazione R dell'oggetto O (domanda n. 2) è stata descritta nei termini seguenti:

T26: Lo studente X rappresenta senza difficoltà frazioni di figure, ma ha difficoltà ad associare la rappresentazione geometrica della frazione alla situazione problema alla quale la frazione è legata.

Per T26, dunque, oltre all'oggetto «frazione» esiste un altro oggetto che si chiama ancora «frazione» ma «in un contesto problematico». L'oggetto dipende dal contesto, dalla situazione, cioè esistono vari oggetti «frazioni» a seconda della situazione. Questa apparente dipendenza, secondo il punto di vista dell'insegnante, dell'oggetto dalla situazione deriva dal fatto che lo studente non incontra difficoltà nel fornire una rappresentazione iconica della frazione utilizzata nella risoluzione di un problema, ma incontra difficoltà ad associare tale rappresentazione al contesto problematico al quale la frazione è legata. Per esempio, lo studente è in grado di rappresentare 4/7 della lunghezza di un segmento o della superficie di una figura, ma non è in grado di attribuire a tale rappresentazione un significato diverso, legato al contenuto dell'enunciato del problema che ha suggerito l'uso di quella frazione. Da un punto di vista semio-cognitivo, questa difficoltà dello studente, evidenziata dall'insegnante, si riconduce alla non congruenza o distanza cognitiva tra il contenuto della rappresentazione iconica dell'oggetto «frazione» e il contenuto dell'enunciato del problema. È proprio questa non congruenza, o distanza cognitiva, a rendere difficile il riconoscimento di un medesimo oggetto, fino al punto da far apparire l'oggetto «frazione» nel «contesto problematico» come un oggetto differente dall'oggetto «frazione» in un contesto («non problematico») nel quale la congruenza semantica tra le unità di contenuto delle rappresentazioni facilita il riconoscimento di un medesimo oggetto (come per esempio nel contesto di un esercizio in cui sono richieste soltanto delle operazioni sulle frazioni). In altre parole, per T26 la difficoltà di riconoscere un medesimo oggetto nel «contesto problematico» diventa una caratteristica intrinseca dell'oggetto, incorporata nell'oggetto, che trasforma l'oggetto in un oggetto differente (con un nome differente).

Si noti che la rappresentazione R, scelta da T26 nella risposta alla domanda n. 2, si riferisce a un'azione, in particolare a una trasformazione di rappresentazioni dal registro delle rappresentazioni di tipo iconico (disegni) al registro della lingua naturale nel quale è formulato il problema, dunque una conversione.

T9 (SS I) ha scelto come oggetto O (domanda n. 1a) «relazione di proporzionalità inversa» e come rappresentazione R dell'oggetto O (domanda n. 2) «grafico (arco di iperbole equilatera)» ovvero una rappresentazione nel registro grafico, espressa per semplicità nel registro della lingua naturale. Emerge in questo caso una certa consapevolezza della distinzione tra i due livelli sopra menzionati, quello dell'oggetto e quello della rappresentazione, confermata anche dalle risposte che ha fornito alle domande successive.

T4 (SS II) ha scelto come oggetto O (domanda n. 1a) «equazione della circonferenza nelle due forme che si studiano a scuola». La rappresentazione R dell'oggetto O (domanda n. 2) è stata descritta nei termini seguenti:

T4: **La rappresentazione sul piano cartesiano della circonferenza a partire dalle equazioni che la identificano.**

Ric: Perché «equazioni» al plurale e «circonferenza» al singolare? A che tipo di equazioni (diverse) fai riferimento?

T4: Equazione della circonferenza di centro e raggio assegnati, ed equazione della circonferenza in forma estesa. Per alcuni ragazzi, come ben sai, sono proprio due oggetti diversi.

Da quest'ultima frase, molto sottile, emerge che T4 tratta le due equazioni come oggetti diversi, in quanto associate a due situazioni diverse. Ricorda il caso di T26: l'oggetto dipende dalla situazione, per cui, in due situazioni differenti, l'oggetto «equazione della circonferenza» (inteso come «oggetto circonferenza individualizzato algebricamente nel piano cartesiano») assume «due forme» diverse. La loro diversità, distanza cognitiva o non congruenza prima di un loro opportuno trattamento nel registro della scrittura algebrica, ostacola il riconoscimento immediato di un medesimo oggetto, fino al punto da trasformare l'oggetto in questione in due oggetti differenti in relazione alle situazioni sopra descritte.

Per quanto riguarda i registri utilizzati dall'insegnante, il loro numero, e dunque il numero delle rappresentazioni, aumenta considerevolmente, in relazione ai contenuti sviluppati nei diversi ordini di scuola. Da un minimo di due a un massimo di quattro registri utilizzati dall'insegnante di scuola primaria e dall'insegnante di scuola secondaria di primo grado, si passa a un minimo ancora di due fino a un massimo di sei registri utilizzati dall'insegnante di scuola secondaria di secondo grado.

L'insegnante di scuola primaria (soprattutto delle ultime classi) ricorre in primo luogo alla coppia di registri (lingua naturale, scrittura frazionaria) spesso accompagnata da un terzo registro, quello delle rappresentazioni di tipo iconico (disegni), e poi alla coppia di registri (lingua naturale, registro multifunzionale delle configurazioni geometriche). L'insegnante di scuola secondaria di primo grado e l'insegnante di scuola secondaria di secondo grado (delle prime tre classi) ricorrono invece entrambi, in primo luogo, alla coppia di registri (lingua naturale, registro multifunzionale delle configurazioni geometriche) e poi alla coppia di registri (lingua naturale, scrittura algebrica) spesso accompagnata dal registro grafico.

La maggior parte degli insegnanti di scuola primaria utilizza o menziona anche abaci, *reglettes*, modellini, perline etc. Si tratta di rappresentazioni «concrete» o iconiche che, come si è detto (§2.1), richiedono in ogni caso l'articolazione con un registro semiotico (come la lingua naturale o una scrittura simbolica) per evidenziare relazioni, esplicitare o effettuare operazioni. D'altra parte, l'uso acritico, non sempre giustificato e analizzato nei dettagli, di rappresentazioni concrete può suscitare nello studente più debole fraintendimenti o incomprensioni che ostacolano o impediscono la gestione delle rappresentazioni proprie della matematica alle quali le rappresentazioni concrete vengono associate. Si tratta di rappresentazioni semiotiche (non di pseudo-oggetti), rappresentazioni semiotiche che l'istituzione (scuola, università, società etc.) considera necessarie per l'apprendimento di un dato contenuto matematico, ovvero per la costruzione cognitiva di determinati oggetti matematici. Molti esempi e riflessioni di carattere didattico e concreto sulla gestione di tali rappresentazioni e le insidie che possono nascondersi dietro al loro uso si trovano in: D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori (2013).

5.2. Aspetti di una rappresentazione che ne favoriscono la comprensione

Il riconoscimento dei diversi aspetti (iconico-qualitativi, iconico-strutturali, di analogia, indicali, simbolici) di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente in grado di gestirla punta l'attenzione o basa le proprie produzioni matematiche è stato rilevato sulla base della capacità dell'insegnante di riconoscere l'alternativa di risposta fornita dal questionario che meglio descrive la sua risposta personale, ovvero sulla base della capacità dell'insegnante di classificare la sua risposta.

Dall'analisi delle risposte è emerso che l'insegnante riconosce e sa classificare alcuni aspetti di una rappresentazione semiotica R sui quali lo studente, in grado di gestire la rappresentazione R, si focalizza (Tabella 1). Si tratta soprattutto di aspetti iconici di tipo strutturale (legati alla costruzione di R, a proprietà o a teoremi).

	(a, b) Aspetti iconici di tipo qualitativo	(c) Aspetti iconici di tipo strutturale	(b, d) Aspetti di analogia	(e) Aspetti indicali	(f) Aspetti simbolici
SP	4	8	5	3	3
SS I	3	8	1		7
SS II	2	4		4	3
Tot (su 55)	9 (16%)	20 (36%)	6 (11%)	7 (13%)	13 (24%)

Nota Le percentuali fanno riferimento al numero complessivo (55) degli aspetti evidenziati dagli insegnanti.

Tabella 1. Aspetti della rappresentazione R sui quali lo studente Y, in grado di gestirla, si focalizza

Inoltre, l'insegnante riconosce e sa classificare gli aspetti di una rappresentazione semiotica R ai quali attribuisce la capacità dello studente di gestirla (Tabella 2). Tali aspetti coincidono in gran parte con quelli sui quali lo studente si focalizza (Tabella 1).

	(a, b) Aspetti iconici di tipo qualitativo	(c) Aspetti iconici di tipo strutturale	(b, d) Aspetti di analogia	(e) Aspetti indicali	(f) Aspetti simbolici
	3	8	5	4	3
SS I	1	8			4
SS II		4		3	3
Tot (su 46)	4 (9%)	20 (43%)	5 (11%)	7 (15%)	10 (22%)

Nota Le percentuali fanno riferimento al numero complessivo (46) degli aspetti evidenziati dagli insegnanti.

Tabella 2. Aspetti della rappresentazione R ai quali l'insegnante attribuisce la capacità di Y di gestire R

L'insegnante di scuola primaria attribuisce la capacità dello studente di gestire la rappresentazione R al fatto di focalizzarsi soprattutto sugli aspetti legati alla costruzione e alle proprietà di R, ovvero sugli aspetti iconico-strutturali di R, e sugli aspetti di analogia (aspetti posti in rapporto, non necessariamente di somiglianza, con il linguaggio quotidiano o l'esperienza sensibile).

L'insegnante di scuola secondaria attribuisce la capacità dello studente di gestire R al fatto di focalizzarsi in primo luogo sugli aspetti legati alla costruzione di R, a proprietà o a teoremi (aspetti iconico-strutturali di R), e in secondo luogo sugli aspetti convenzionali, come quelli legati a notazioni, definizioni, regole o vincoli d'uso (aspetti simbolici di R) (Tabella 2).

Alcuni esempi

T6 (SP), in relazione all'oggetto «numeri razionali» e alla rappresentazione nella scrittura frazionaria, ha risposto alla domanda relativa al punto (6) evidenziando in particolare le alternative «c1», «c2» e «d», descritte nella risposta relativa al punto (5) nei termini seguenti: (c1) «costruzione di R»; (c2) «proprietà»; (d) «aspetti legati al linguaggio quotidiano, in particolare: la propria esperienza nella quotidianità in punteggi, probabilità, percentuali, statistica». Si tratta di aspetti legati alla costruzione di R, ovvero iconico-strutturali, e di aspetti di analogia.

T18 (SS I), in relazione all'oggetto «angolo» e alla rappresentazione R «il concetto di angolo come superficie infinita», ha ricondotto la capacità dello studente Y di utilizzare la rappresentazione R [punto (6)] al fatto di focalizzarsi soprattutto su «definizioni» e «regole o vincoli d'uso»:

T18: Le definizioni e le regole non sono state semplicemente memorizzate meccanicamente ma comprese e interiorizzate.

In questo caso l'insegnante fa riferimento ad aspetti convenzionali della rappresentazione, legati a definizioni, regole o vincoli d'uso, ovvero ad aspetti simbolici. Si noti, d'altra parte, l'identificazione della rappresentazione R dell'oggetto «angolo» con l'oggetto stesso.

T4 (SS II), in relazione all'oggetto «equazione della circonferenza nelle due forme che si studiano a scuola» e alla rappresentazione nel piano cartesiano della circonferenza, alla domanda relativa al punto (6) ha fornito la seguente risposta:

T4: Individua come prima cosa il centro della circonferenza, quindi disegna il resto. Applica correttamente i principi di equivalenza delle equazioni, ed è in grado di passare da una forma all'altra senza difficoltà.

In altre parole, lo studente si focalizza su aspetti legati alla costruzione e alle proprietà della rappresentazione R.

5.3. Aspetti di una rappresentazione che ne ostacolano la comprensione

Il riconoscimento dei diversi aspetti (iconico-qualitativi, iconico-strutturali, di analogia, indicali, simbolici) di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà punta l'attenzione o basa le proprie produzioni matematiche è stato rilevato, anche in questo caso, sulla base della capacità dell'insegnante di riconoscere l'alternativa di risposta fornita dal questionario che meglio descrive la sua risposta personale, ovvero sulla base della capacità dell'insegnante di classificare la sua risposta. Dall'analisi delle risposte è emerso che l'insegnante riconosce e sa classificare alcuni aspetti di una rappresentazione semiotica R sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà si focalizza (Tabella 3). Si tratta soprattutto di aspetti iconici di tipo qualitativo (aspetti concreti di R, come quelli legati alla sua forma, dimensione, colore o posizione) o di aspetti indicali (aspetti di rinvio a qualcos'altro, come a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico o a proprietà) nel caso dell'insegnante di scuola primaria; di aspetti iconici di tipo strutturale (legati alla costruzione di R, a proprietà o a teoremi) nel caso dell'insegnante di scuola secondaria di primo e di secondo grado.

	(a, b) Aspetti iconici di tipo qualitativo	(c) Aspetti iconici di tipo strutturale	(b, d) Aspetti di analogia	(e) Aspetti indicali	(f) Aspetti simbolici
SP	8	2	5	7	1
SS I	6	8	5	4	5
SS II	3	5		3	1
Tot (su 63)	17 (27%)	15 (24%)	10 (16%)	14 (22%)	7 (11%)

Nota Le percentuali fanno riferimento al numero complessivo (63) degli aspetti evidenziati dagli insegnanti.

Tabella 3. Aspetti della rappresentazione R sui quali lo studente X, che la gestisce con difficoltà, si focalizza

Inoltre, l'insegnante riconosce e sa classificare gli aspetti della rappresentazione semiotica R ai quali riconduce le difficoltà che incontra lo studente nella sua gestione (Tabella 4). Questi ultimi non sempre coincidono con quelli sui quali si focalizza lo studente (Tabella 3). Secondo l'insegnante, infatti, lo studente in difficoltà si focalizza per lo più sugli aspetti concreti della rappresentazione R, mentre le difficoltà di gestione di R, secondo lo stesso insegnante, sono da ricondurre per lo più ad aspetti legati alla costruzione di R o a proprietà dell'oggetto rappresentato (aspetti iconico-strutturali).

	(a, b) Aspetti iconici di tipo qualitativo	(c) Aspetti iconici di tipo strutturale	(b, d) Aspetti di analogia	(e) Aspetti indicali	(f) Aspetti simbolici
SP	9	4	3	5	3
SS I	2	7	3	2	6
SS II	2	4		2	3
Tot (su 55)	13 (24%)	15 (27%)	6 (11%)	9 (16%)	12 (22%)

Nota Le percentuali fanno riferimento al numero complessivo (55) degli aspetti evidenziati dagli insegnanti.

Tabella 4. Aspetti della rappresentazione R ai quali l'insegnante riconduce la difficoltà di X di gestire R

L'insegnante di scuola primaria, in particolare, riconduce la difficoltà dello studente nella gestione di R al fatto di focalizzarsi in primo luogo sugli aspetti concreti di R, come quelli legati alla sua forma, dimensione, colore, posizione o alla somiglianza di R con qualcos'altro di concreto (aspetti iconici di tipo qualitativo), e in secondo luogo sugli aspetti di rinvio a qualcos'altro, come a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico o a proprietà (aspetti indicali).

L'insegnante di scuola secondaria di primo e di secondo grado, a differenza dell'insegnante di scuola primaria, riconduce la difficoltà dello studente nella gestione di R al fatto di focalizzarsi in primo luogo sugli aspetti legati alla costruzione di R, a proprietà o a teoremi (aspetti iconico-strutturali di R), e in secondo luogo sugli aspetti convenzionali, come quelli legati a notazioni, definizioni, regole o vincoli d'uso (aspetti simbolici) (Tabella 4). Dunque, l'insegnante di scuola secondaria di primo e di secondo grado riconduce la difficoltà di gestione di R da parte dello studente agli stessi aspetti (iconico-strutturali e simbolici) ai quali attribuisce la capacità di un altro studente di gestire R (§5.2).

Alcuni esempi

T6 (SP), in relazione all'oggetto «numeri razionali» e alla rappresentazione «frazioni», ha risposto alla domanda relativa al punto (4) evidenziando l'alternativa «a» descritta nella risposta relativa al punto (3) nei termini seguenti: «Rappresentazioni e riconoscimenti concreti di parti frazionarie (tagliare, disegnare, colorare…)». Si tratta di aspetti iconici di tipo qualitativo.

T13 (SP), in relazione all'oggetto «frazioni» e al confronto tra frazioni, ha risposto alla domanda relativa al punto (4) evidenziando l'alternativa «e» descritta nella risposta relativa al punto (3) nei termini seguenti: «[Aspetti di rinvio a qualcos'altro (…) in particolare:] ai numeri naturali, per cui 1/4 è maggiore di 1/3 così come 4 > 3». Entrano in questo caso in gioco aspetti indicali.

T14 (SS I), in relazione all'oggetto «cerchio» e alla rappresentazione grafica di sue proprietà, ha risposto alla domanda relativa al punto (4) evidenziando le alternative «c2» (aspetti strutturali legati a proprietà), «f2» (aspetti convenzionali legati a definizioni) e «f3» (aspetti convenzionali legati a regole o vincoli d'uso). Si tratta di aspetti iconico-strutturali e di aspetti simbolici.

5.4. Conflitti semiotici generati da contenuti di rappresentazioni

La consapevolezza dei conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto è stata rilevata sulla base della capacità dell'insegnante di riconoscere un numero significativo di casi di rappresentazioni semiotiche il cui contenuto presenta componenti o aspetti differenti che possono essere tra loro confusi, oppure di rappresentazioni semiotiche con contenuti simili per certi aspetti, del medesimo oggetto, che possono rinviare a oggetti differenti, oppure di rappresentazioni semiotiche con contenuti simili per certi aspetti, di oggetti differenti, che possono rinviare al medesimo oggetto, ostacolandone la gestione da parte dello studente.

Dall'analisi delle risposte è emerso che l'insegnante, soprattutto di scuola secondaria, avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto. In particolare, l'insegnante è in grado di ricondurre i conflitti semiotici alla confusione o identificazione da parte dello studente di una componente di un contenuto di una rappresentazione con un'altra componente di un altro contenuto, simile al primo sotto qualche aspetto, in particolare (e soprattutto) per l'aspetto iconico-qualitativo (immediatamente o facilmente riconoscibile). D'altra parte, solo in qualche caso l'insegnante è in grado di ricondurre i conflitti semiotici alla confusione o identificazione da parte dello studente di aspetti completamente differenti di uno stesso contenuto (per esempio, l'aspetto concreto di una rappresentazione o di rinvio a qualcos'altro con il suo aspetto simbolico, come nel caso di uno studente che identifichi la rappresentazione di un triangolo acutangolo scaleno con quella di un triangolo generico, escludendo altri tipi di rappresentazione, per esempio quella di un triangolo ottusangolo).

Alcuni esempi

T1 (SP), in relazione all'oggetto e alla rappresentazione «frazioni», alla domanda n. 7 («La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?») ha risposto:

T1: **Con i numeri naturali.**

Ric: Ti stai riferendo a S, a O oppure a O'?

T1: L'allievo X confonde la rappresentazione R [«frazioni»] con S (numeri naturali) con O (frazioni).

Ric: Puoi dirmi qualcosa di più?

T1: Qui [indicando la risposta scritta sul questionario] non sapevo bene come spiegarmi… Cioè, per lui, probabilmente a un certo punto esistevano solo i numeri naturali, ma [questo fatto] era legato alla spiegazione di prima… [alla risposta alla domanda n. 6, punto «c1»:] l'allievo X considera 3/4 come due numeri separati fra loro [3 e 4] e non riesce a stabilire una relazione che lo porti a considerare 3/4 come numero.

Emerge in questo caso un conflitto semiotico tra rappresentazioni con contenuti simili di oggetti differenti (frazioni e numeri naturali). La complessità della rappresentazione di una frazione è attribuita alla forma del suo contenuto, ovvero alla sua componente iconico-qualitativa, non immediatamente riconducibile alla forma del contenuto della rappresentazione di un numero nel registro della scrittura decimale. T1, dunque, avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto, in particolare per l'aspetto iconico-qualitativo.

In relazione alla richiesta di individuare un'altra rappresentazione T (dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O') che sia meno problematica, rispetto a R, per lo studente X (domanda n. 8), T1 ha risposto: «I numeri decimali».

Si fa in questo caso riferimento a contenuti di rappresentazioni semiotiche differenti (nel registro della scrittura frazionaria e in quello della scrittura decimale) che rinviano al medesimo oggetto.

Alla domanda n. 9 («Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R?») ha fornito la seguente risposta:

T1: Il fatto che l'allievo può ottenere il numero decimale eseguendo una divisione quindi opera con i numeri naturali e questo lo rassicura.

Fatto che evidenzia ancora una volta i conflitti semiotici sopra menzionati.

T7 (SS I), in relazione all'oggetto «angolo» e alla rappresentazione R riportata in Figura 4, alla domanda n. 7 («La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?») ha fornito la seguente risposta:

T7: Sì, porta a confondere l'ampiezza della parte colorata [di R] con la misura dell'angolo.

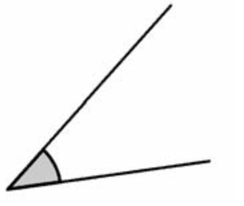

Figura 4. Rappresentazione R dell'oggetto «angolo» scelta da T7.

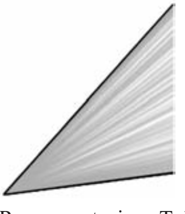

Figura 5. Rappresentazione T dell'oggetto «angolo» scelta da T7.

Ric: Pensa ora a un'altra rappresentazione T che sia meno problematica, rispetto a R, per lo studente X… [domanda n. 8].

T7: Il registro è sempre lo stesso, la rappresentazione è questa qui [disegna (Figura 5) e aggiunge:] Semmai ci posso scrivere «senza gli archetti»…

Ric: Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R? [domanda n. 9].
T7: Perché evita di identificare l'ampiezza dell'angolo con l'archetto [Figura 6] o con la parte colorata [Figura 4].

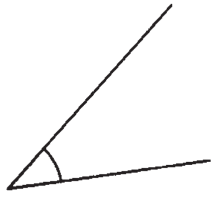

Figura 6. Rappresentazione dell'angolo con l'«archetto».

In questo caso, nella tipica rappresentazione dell'angolo con l'archetto (Figura 6), si manifesta un conflitto semiotico tra la lunghezza dell'archetto, l'ampiezza della parte di piano limitata dall'archetto e dai lati dell'angolo (eventualmente colorata come in Figura 4) e l'ampiezza dell'angolo. L'archetto costituisce un aspetto indicale della rappresentazione dell'angolo, l'ampiezza dell'angolo costituisce un aspetto simbolico della rappresentazione, mentre la lunghezza dell'archetto e l'ampiezza della parte limitata dall'archetto e dai lati dell'angolo costituiscono due aspetti iconico-qualitativi della rappresentazione (§2.2). Emerge dunque una confusione tra aspetti completamente differenti di uno stesso contenuto della rappresentazione in questione. Confusione che è stata evidenziata anche da altre ricerche, in particolare da Sbaragli e Santi (2012).

T9 (SS I), in relazione all'oggetto O «relazione di proporzionalità inversa» e alla rappresentazione R «grafico (arco di iperbole equilatera)», alla domanda n. 7 («La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?») ha risposto:

T9: **Sì, con la diretta proporzionalità (oggetto O').**
Ric: Con quale rappresentazione S di O' lo studente X tende a confondere la rappresentazione R?
T9: Con la rappresentazione S della legge (confonde le due scritture: $yx=k$ e $y=kx$).
Ric: Se non ho capito male, la rappresentazione R era il grafico (arco di iperbole equilatera). Mi pare però che qui consideri come R la legge $yx=k$. Mi puoi chiarire questa cosa?
T9: Sì, in effetti non è chiaro: riferisce all'arco di iperbole la legge della diretta proporzionalità (poi, in realtà fa confusione anche con le due scritture…).

L'insegnante avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto. La risposta evidenzia una confusione tra il contenuto di una rappresentazione e il contenuto di un'altra rappresentazione, simile al primo per l'aspetto iconico-qualitativo.

In relazione alla rappresentazione T meno problematica rispetto a R (domanda n. 8), T9 ha risposto:

T9: Definizione di relazione di proporzionalità inversa (lingua naturale).

Ma una definizione non costituisce di per sé una rappresentazione semiotica di un oggetto matematico. Si tratta di una espressione di una relazione tra due o più entità in uno o più registri discorsivi (lingua naturale, linguaggio della scrittura simbolica o linguaggio formale), nella quale si utilizzano anche rappresentazioni semiotiche di oggetti matematici (R. Duval, comunicazione personale, 26 giugno, 2013).

Alla domanda n. 9 («Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R?») ha fornito la seguente risposta:

T9: La verbalizzazione di una definizione rispetto alla formulazione in legge e alla rappresentazione grafica: «prodotto costante» è sicuramente qualcosa di più «gestibile».

Rimane aperto il problema del riconoscimento della corrispondenza tra le unità di contenuto matematicamente pertinenti della definizione di relazione di proporzionalità inversa e le unità di contenuto matematicamente pertinenti delle rappresentazioni di tale relazione nel registro della scrittura algebrica e nel registro grafico, riconoscimento non sempre immediato o spontaneo.

T4 (SS II), in relazione all'oggetto «equazione della circonferenza nelle due forme che si studiano a scuola» e alla rappresentazione nel piano cartesiano della circonferenza, alla domanda n. 7 («La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?») ha risposto:

T4: Non ritengo confonda rappresentazioni diverse, ma credo cerchi di riportare contemporaneamente tutte le proprietà che sa essere relative all'oggetto senza saper scegliere quelle necessarie al caso specifico.

Ric: Quali proprietà non necessarie lo studente X «riporta contemporaneamente»? Puoi chiarire questo aspetto? Oppure, mi puoi fornire un esempio?

T4: Esempio: devo determinare la [lunghezza della] corda individuata da due circonferenze secanti: lo studente cerca di applicare teoremi relativi al confronto tra la lunghezza delle corde, alla loro distanza dal centro, al fatto che la corda nel punto medio è perpendicolare al raggio, senza pensare, più semplicemente, a risolvere il sistema formato dalle due equazioni.

Si tratta di una evidenziazione del mancato riconoscimento, da parte dello studente, di una corrispondenza tra le unità di contenuto matematicamente pertinenti dell'enunciato del problema (o esercizio) da risolvere e le unità di contenuto delle rappresentazioni necessarie, richieste o attese, per la sua risoluzione. In altre parole, è una evidenziazione di una mancata coordinazione del registro geometrico e del registro della scrittura algebrica, insieme al registro della lingua naturale.

In relazione alla rappresentazione T meno problematica rispetto a R (domanda n. 8), T4 ha risposto:

T4: Stesso registro, rappresentazione della retta.

Ric: Puoi fornirmi un esempio di rappresentazione T?

T4: Rappresentazione grafica sul piano cartesiano (geometria analitica), equazione esplicita o implicita (geometria analitica), rappresentazione in geometria piana (geometria piana). La prima e l'ultima sono spesso confuse tra loro, come le due intermedie [equazione esplicita ed equazione implicita].

Emerge in questo caso una confusione tra rappresentazioni simili di un medesimo oggetto (l'oggetto «retta»). T4, dunque, avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto, in particolare per l'aspetto iconico-qualitativo, che rinviano al medesimo oggetto.

Alla domanda n. 9 («Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R?») ha risposto:

T4: **Un numero minore di termini specifici e una rappresentazione algebrica più semplice.**

Ric: Che cosa intendi per «termini specifici»?

T4: Coefficiente angolare, intercetta…

La difficoltà di gestione della rappresentazione di una circonferenza nel registro della scrittura algebrica è attribuita alla forma del suo contenuto, ovvero alla sua componente iconico-qualitativa, in particolare al numero delle sue unità di contenuto geometricamente pertinenti.

T12 (SS I), alla domanda n. 10, in corrispondenza della rappresentazione: $0x=5$ (del questionario per insegnanti di scuola secondaria di primo grado), ha risposto:

T12: **I. [Somiglianze con]:** $a \times x = b$
II. [Confusione con]: «impossibile» e «indeterminata».

L'insegnante avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni simili per l'aspetto iconico-qualitativo nel registro della scrittura algebrica ($0x=5$, $0x=0$) e dai contenuti delle rappresentazioni ad essi corrispondenti nel registro della lingua naturale («equazione impossibile» ed «equazione indeterminata»).

6. Implicazioni e riflessioni didattiche

Questo studio ha evidenziato l'importanza di una dimensione dell'apprendimento della matematica relativamente nuova per l'insegnante. Anche se da diverse decine di anni gran parte della ricerca in didattica della matematica si focalizza su tale dimensione, gran parte del mondo della scuola dunque degli insegnanti, non la conosce, o almeno non ne è pienamente consapevole. Prova ne è il fatto che, tuttora, il senso di alcune espressioni alla base di tale dimensione, quali «registro di rappresentazione», «rappresentazione semiotica» e «oggetto matematico», non è colto pienamente da alcuni insegnanti. I risultati della ricerca lo hanno mostrato chiaramente.

Ben consapevoli dell'uso specialistico in didattica della matematica delle espressioni sopra riportate, la loro introduzione si è rivelata tuttavia importante e cruciale per la raccolta dei dati necessari. Non sarebbe stato possibile, o sarebbe stato troppo complesso, sostituirle o evitarle senza snaturare la ricerca. In altre parole, l'espressione «oggetto matematico» è stata utilizzata accanto a quella di «rappresentazione semiotica» e a quella di «registro di rappresentazione», pur sapendo che l'insegnante, nella maggior parte dei casi, non ha molta familiarità con questi termini.

Questa ricerca non si è comunque focalizzata sulla natura degli oggetti matematici o delle rappresentazioni, non era questo il suo scopo. Quello su cui la ricerca ha cercato di focalizzare l'attenzione dell'insegnante non è l'oggetto matematico in sé e per sé, ma l'oggetto istituzionale (Chevallard, 1985; Godino & Batanero, 1994), ovvero il sapere o il sistema di pratiche (D'Amore & Godino, 2006) riconosciuto come legittimo, pertinente o adeguato, entro una data istituzione, insieme ai mezzi semiotici condivisi per la sua trasposizione didattica.

D'altra parte, le questioni affrontate nel questionario sono apparse insolite, inusuali, agli occhi dell'insegnante. Nelle parole di R. Duval: «L'insegnante non è stato abituato, anche durante la sua formazione, a rispondere a domande di questo tipo. È insolito, per lui, sentirsi chiedere cose come queste» (comunicazione personale, 26 giugno, 2013). I questionari somministrati agli insegnanti si focalizzano in generale, o per lo più, su altri argomenti, in particolare sui seguenti, anche tra loro intrecciati:

1. i contenuti matematici da insegnare o la conoscenza matematica dell'insegnante (punto di vista matematico);
2. la gestione della classe (punto di vista pedagogico, psicologico, sociale);
3. il tipo di situazione, di problema o di attività da proporre in aula o in laboratorio per introdurre o trattare un dato contenuto matematico (punto di vista della teoria delle situazioni didattiche, dell'ingegneria didattica, della teoria antropologica della didattica, degli studi socioculturali, degli studi basati sul curricolo etc.);
4. l'affettività e le convinzioni dell'insegnante sulla matematica e sul suo insegnamento-apprendimento (punto di vista filosofico, epistemologico, affettivo, cognitivo o metacognitivo).

Questi quattro punti rientrano tra gli obiettivi principali della formazione degli insegnanti[13]. Costituiscono inoltre le principali preoccupazioni dell'insegnante, per due ragioni fondamentali:

a. molti insegnanti chiedono che cosa devono fare, in aula o in laboratorio, domani e nei prossimi giorni, per insegnare ciò che si chiede loro di insegnare, e gli strumenti più efficaci per farlo (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2014);
b. molti insegnanti si trovano in difficoltà nella trasposizione didattica (Chevallard, 1985) di diversi contenuti matematici, ovvero nell'adattamento del Sapere (riconosciuto e accettato come tale entro una data istituzione) al contesto della propria aula.

Se si fossero poste domande su, per esempio, come insegnare un dato contenuto matematico, oppure sulle difficoltà incontrate nell'insegnamento di quel dato contenuto, sarebbe stato tutto diverso, un'altra cosa. Ma questa ricerca è totalmente differente. Riguarda le ragioni semiotiche e cognitive delle difficoltà sistematiche e ricorrenti che, secondo l'insegnante, uno studente incontra nel processo di apprendimento della matematica. Questa è la ragione per la quale il questionario «è molto interessante e allo stesso tempo molto difficile» (R. Duval, comunicazione personale, 26 giugno, 2013).

13. Sulle conoscenze, convinzioni, pratiche e sull'affettività dell'insegnante si veda per esempio: Davis & Simmt, 2006; Lester, 2007; Ponte & Chapman, 2006. Per quanto riguarda la problematica della formazione culturale degli insegnanti si veda per esempio: D'Amore & Fandiño Pinilla, 2009.

È interessante per due ragioni:

- permette di evidenziare come l'insegnante tiene conto di tutta la dimensione non-matematica, soprattutto di quella cognitiva, implicata nell'insegnamento-apprendimento della matematica;
- permette di far emergere le difficoltà d'uso da parte dell'insegnante di espressioni o termini tecnici, come quelli sopra menzionati, e più in generale le difficoltà d'uso, da parte dell'insegnante, del linguaggio specifico della didattica della matematica, difficoltà che le attività di formazione degli insegnanti dovrebbero in qualche modo limitare, se non eliminare.

L'argomento relativamente nuovo, la complessità del questionario e il numero relativamente basso di insegnanti di scuola secondaria di secondo grado partecipanti alla ricerca, indicano senza dubbio la necessità di ulteriori ricerche, da realizzare anche con gli stessi metodi e con un questionario meno articolato e impegnativo.

In ogni caso, le risposte degli insegnanti mostrano chiaramente che per interpretare quel che succede in aula, per organizzare e gestire in modo professionale le attività matematiche, occorre una preparazione specifica non solo in matematica, storia, epistemologia, pedagogia, sociologia e/o psicologia (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2009), ma anche in semiotica (D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013). Dalla nostra ricerca emerge questa lacuna importante, non trascurabile, nella preparazione professionale degli insegnanti.

7. Conclusione

Questa ricerca si è focalizzata sulla consapevolezza dell'insegnante sulle ragioni semiotiche e cognitive delle difficoltà che uno studente incontra nel processo di apprendimento della matematica. Si tratta di una questione cruciale dell'insegnamento-apprendimento della matematica, poco esplorata. La ricerca ne ha evidenziato tutta la rilevanza sia teorica sia concreta, per una riflessione professionale su una dimensione specifica dell'apprendimento della matematica e per una riflessione critica sulla formazione degli insegnanti.

I risultati di questa ricerca hanno mostrato chiaramente come sia assolutamente necessario ripensare alla formazione iniziale e in servizio degli insegnanti di matematica, includendo in essa argomenti di semiotica declinati in chiave didattica, in particolare una riflessione professionale sul ruolo che la gestione semiotica gioca nella costruzione cognitiva degli oggetti matematici, nella valutazione dei processi di apprendimento degli studenti e, più in generale, delle situazioni d'aula.

Questa ricerca apre dunque uno spiraglio interessante anche nel mondo della formazione degli insegnanti di matematica.

Ringraziamenti

Un sentito e sincero ringraziamento va a tutti gli insegnanti che hanno accettato di partecipare a questa ricerca. Un ringraziamento particolare va al Prof. Raymond Duval, per i preziosi contributi scientifici e chiarimenti, i generosi consigli e suggerimenti forniti nel corso della ricerca. Un ringraziamento del tutto speciale va al prof. Bruno D'Amore, per la competenza, gentilezza ed estrema disponibilità con cui ha diretto tutte le fasi della ricerca; per il contributo scientifico e critico fondamentale, determinante e di assoluta rilevanza in questa ricerca come in tutta la mia formazione.

Bibliografia

Cajori, F. (2007). *A History of Mathematical Notations: Volume I*. New York: Cosimo Classics.

Camici, C., Cini, A., Cottino, L., Dal Corso, E., D'Amore, B., Ferrini, A., Francini, M., Maraldi, A. M., Michelini, C., Nobis, G., Ponti, A., Ricci, M., & Stella, C. (2002). Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *25*(3), 255-270.

Cassin, B., Apter, E., Lezra, J., & Wood, M. (Eds.). (2014). *Dictionary of Untranslatables: A Philosophical Lexicon*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Chevallard, Y. (1985). *Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73-112.

D'Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, *15*(2), 150-173.

D'Amore, B. (2002). Matematica in alcune culture sudamericane. Un contributo all'Etnomatematica. *Bollettino dei docenti di matematica*, 44, 9-19.

D'Amore, B. (2005). Pipe, cavalli, triangoli e significati. Contributo ad una teoria problematica del significato concettuale, da Frege e Magritte, ai giorni nostri. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *28B*(5), 415-433.

D'Amore, B. (2006a). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, *20*(4), 557-583.

D'Amore, B. (2006b). *Concepts, objects, semiotic and meaning*. *Investigacions of the concept's construction in mathematical learning* (Doctoral thesis, Constantine the Philosopher University, Nitra, Slovakia). Retrieved from http://math.unipa.it/%7Egrim/Tesi_it.htm

D'Amore, B. (2007a). How the treatment or conversion changes the sense of mathematical objects [Invited speaker article]. In E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Current trends in Mathematics Education*. Proceedings of 5th MEDCONF2007 (Mediterranean Conference on Mathematics Education), 13-15 April 2007, Rhodes, Greece (pp. 77-82). Athens: New Technologies Publications.

D'Amore, B. (2007b). Mathematical objects and sense: How semiotic transformations change the sense of mathematical objects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, 7, 23-45.

D'Amore, B. (2015). *Arte e matematica: Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili*. Bari: Edizioni Dedalo.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2009). La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale. In F. Frabboni & M. L. Giovannini (Eds.), *Professione insegnante* (pp. 145-154). Milano: Franco Angeli.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2014). Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *Difficoltà in Matematica*, *11*(1), 89-109.

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(1), 9-38.

D'Amore, B., & Matteuzzi, M. (1976). *Gli interessi matematici*. Venezia: Marsilio.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica: La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefazioni di Raymond Duval e Luis Radford. Bologna: Pitagora.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(3), 293–319. doi: 10.1007/s10649-006-2372-4

Descartes, R. (1852). *Oeuvres philosophiques de Descartes.* Paris: Panthéon littéraire.

Duval, R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*(1), 7-25.

Duval, R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*(1), 57-74.

Duval, R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*(1), 235-253.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. ULP, IREM Strasbourg, *5*(1), 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 349-382.

Duval, R. (2006a). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(4), 585-619.

Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131. doi:10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2006c). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 45-81.

Duval, R. (2009). «Objet»: un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles? In J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Objet* (pp. 79-108). Grenoble: PUG.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas.* Organização de Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM.

Eco, U. (1975). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Hoffmann, M. H. G. (2010). Diagrams as scaffolds for abductive insights. *AAAI Publications, Workshops at the Twenty-Fourth AAAI Conference on Artificial Intelligence* (pp. 42-49). Retrieved from http://aaai.org/ocs/index.php/WS/AAAIW10/paper/view/2027

Iori, M. (2015). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica* (Doctoral thesis, University of Palermo, Italy). Retrieved from http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Iori/Iori.htm

Lanfredini, R. (Ed.). (2006). *A priori materiale. Uno studio fenomenologico*. Milano: Guerini e Associati.

Lester, F. K. (Ed.). (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Mason, M. (2010). Sample size and saturation in PhD studies using qualitative interviews. *Forum: Qualitative Social Research*, *11*(3). Retrieved from http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs100387

Morse, J. M. (1991). Approaches to qualitative–quantitative methodological triangulation. *Nursing Research*, *40*(2), 120-123.

Peirce, C. S. (1933). *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Vol. IV: The Simplest Mathematics*. CP 4. Edited by C. Hartshorne & P. Weiss. Cambridge: Harvard University Press.

Peirce, C. S. (1955). *Philosophical Writings of Peirce*. PW. Edited by J. Buchler. New York: Dover Publications.

Peirce, C. S. (1976). *The New Elements of Mathematics, Vol. IV: Mathematical Philosophy*. NEM 4. Edited by C. Eisele. The Hague: Mouton Publishers.

Peirce, C. S. (1992). *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings, Volume 1 (1867-1893)*. EP 1. Edited by N. Houser & C. Kloesel. Bloomington: Indiana University Press.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam-Taipei: Sense Publishers.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education, 40*(2), 165-178.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, *40*(2), 317–327.

Rojas Garzón, P. J. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: Representaciones semióticas y sentidos*. Prologue by Bruno D'Amore. Bogotá: Editorial of the Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: A comparison between semiotic perspectives* (Doctoral thesis, University of Palermo, Italy). Retrieved from http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/santi/santi.htm

Sbaragli, S., & Santi, G. (2012). Le scelte dell'insegnante relative al concetto di angolo. *Bollettino dei docenti di matematica*, 65, 35-55.

Tashakkori, A., & Teddlie, C. (1998). *Mixed methodology: Combining qualitative and quantitative approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Tashakkori, A., & Teddlie, C. (Eds.). (2003). *Handbook of mixed methods in social and behavioral research*. Thousand Oaks, CA: Sage.